TD "Ecoulements visqueux" - 2^e partie

Solutions.

Exercice 1 : Courroie qui entraine un liquide.

Les propriétés du liquide entrainé par la courroie sont : μ et ρ.

La vitesse de la courroie, selon (Ox), verticale est V.

La hauteur du film entrainé est h.

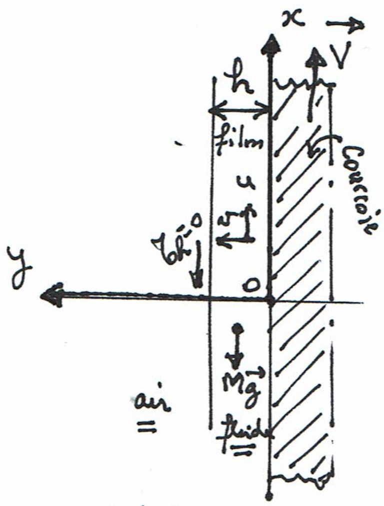


Schéma.

1°/* Les équations de mouvement du fluide : On applique les équations de Navier-Stokes pour un écoulement permanent $\left(\frac{\partial(\;)}{\partial t}=0\right)$ d'un fluide incompressible.

Comme les variations des paramètres se font dans le plan (o,x,y) on a :

$$u.\frac{\partial u}{\partial x}+v.\frac{\partial u}{\partial y}=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (1)$$

$$u.\frac{\partial v}{\partial x}+v.\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad (2)$$

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad (3)$$

Comme la composante (v) de la vitesse est nulle, alors toutes les dérivées partielles de (v) sont nulles : $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

L'eqt. (3) donne :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \text{(écoulement développé selon}$$

et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$.

Les éqts (1) et (2) sont alors simplifié

$$\boxed{\begin{array}{ll}(1) & 0=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ (2) & 0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\end{array}} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=0 \text{ et } P(x) \text{ seule}$$

* Les conditions aux limites associées :

$y=0$, $u=V$ (Condition d'adhérence sur la paroie du courroie.

$y=h$; $\begin{cases} P=P_{at} \\ \tau_h=\mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=h}=0 \end{cases}$ (Contrainte est nulle pour $y=h$

$$\hookrightarrow \left.\frac{du}{dy}\right)_{y=h}=0 \quad (4)$$

2°/ Distribution de la vitesse du film.

de l'éqt. (1) on a :

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{\nu}\left(g+\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}\right) \quad (1)$$

Le mouvement du fluide est due à son entrainement par la courroie et pas à cause du gradient de pression, $\frac{dP}{dx}=0$ ($P=cte=P_{at}$) pour tout x.

L'éqt. (1) est réduite à : $\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{g}{\nu}$

L'intégration de l'éqt (1) donne :

$$\frac{du}{dy}=\frac{g}{\nu}y+C_1$$

La condition (4) $\boxed{\text{donne } C_1=-\frac{g}{\nu}h}$

$$\frac{du}{dy} = \frac{g}{\nu}(y-h) \quad \text{et} \quad u(y) = \frac{g}{\nu}\left(\frac{y^2}{2} - hy\right) + C_2$$

Sachant que la condition sur la paroi

$y=0 \Rightarrow u(0) = V \Rightarrow \boxed{C_2 = V}$

La distribution de la vitesse est:

$$\boxed{u(y) = \frac{g}{\nu}\left(\frac{y^2}{2} - h.y\right) + V}$$

La vitesse sur l'interface: fluide/air est : $y = h \Rightarrow u(h) = V - \frac{g}{2\nu}h^2$

Elle diminue en $\left(\frac{h^2}{\nu}\right)$.

3°/ Le débit d'huile entraîné par la courroie (par unité de profondeur).

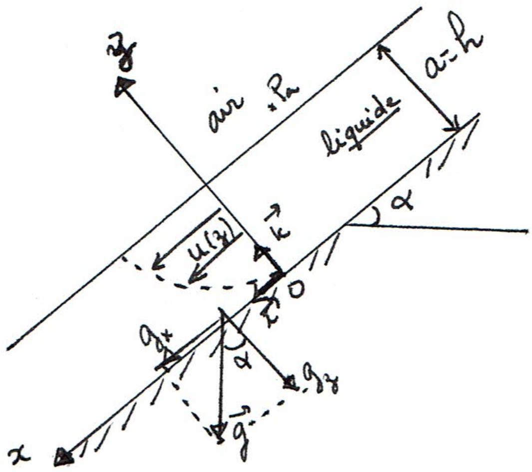
Si l'on considère que l'épaisseur de la courroie est très faible par rapport à sa largeur (profondeur). La courroie entraîne l'huile par ses deux faces.

Le débit volumique est:

$$q_v = 2\int_0^h u(y).dy = 2\int_0^h \left[\frac{g}{\nu}\left(\frac{y^2}{2} - hy\right) + V\right].dy$$

$$q_v = 2\left(V.h - \frac{gh^3}{3\nu}\right) \quad \text{par unité de profondeur.}$$

Exercice 2 : (Ruissellement sur un plan incliné)



1°/ Distributions de la pression et de la vitesse de l'écoulement.

L'écoulement est plan (O,x,z), permanent d'un fluide incompressible. Si l'on considère que les composantes de la vitesse sont: $(u, 0, w)$.

Les équations de m^{vt} sont:

Equations de Navier-Stokes :

$$0 = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1) \text{ selon } Ox$$

$$0 = g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \qquad (2) \text{ selon } Oz$$

Eqt. de continuité:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}^{0} = 0 \;(3) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{Écoult développé})$$

Conditions aux limites :

- sur l'interface: liquide/plan incliné.

$z = 0 \Rightarrow u = 0$ (adhérence)

- sur l'interface: liquide/air.

$$z = h \Rightarrow \begin{cases} P = P_{at} \\ \tau_h = 0 = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=h} \Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right)_h = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow u(h) = U_{max}$

a) Distribution de la pression:

$g_z = -g.\cos\alpha$ et $g_x = g.\sin\alpha$

de l'egt.(2) on a:

$$\frac{dP}{dz} = \rho.g_z = -\rho g.\cos\alpha$$

Par intégration: $\int dP = \int -\rho g \cos\alpha.dz$

Soit $P(z) = -\rho g.z.\cos\alpha + k$; (k = cste)

pour $z = h \Rightarrow P(h) = P_a = -\rho g h \cos\alpha + k$

soit $k = P_a + \rho g h \cos\alpha$

L'expression de la pression :

$$\boxed{P(z) = \rho g.\cos\alpha(h-z) + P_a} \qquad (4)$$

b) Distribution de la vitesse.

de l'éqt. (4) nous avons $\frac{dP}{dx} = 0$

car la pression ne dépend que de z.

L'éqt de mouvement (1) est :

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{g_x}{\nu} = -\frac{g.\sin\alpha}{\nu}$$

L'intégration de cette équation :

$$\frac{du}{dz} = -\frac{g}{\nu} z \sin\alpha + C_1$$

et $u(z) = -\frac{g}{2\nu} . z^2 \sin\alpha + C_1 z + C_2$ (5)

- Détermination des constantes C_1 et C_2 :

à $z = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$ car $u(0) = 0$

et à $z = h \Rightarrow \left.\frac{du}{dz}\right)_{z=h} = -\frac{gh}{\nu} . \sin\alpha + C_1 = 0$

d'où : $\boxed{C_2 = \frac{gh}{\nu} . \sin\alpha}$

L'expression (5) de la vitesse $u(z)$ est :

$$\boxed{u(z) = \frac{g.\sin\alpha}{\nu} . \left(hz - \frac{z^2}{2}\right) = \frac{g.z.\sin\alpha}{\nu}\left(h - \frac{z}{2}\right)}$$

2°/ Détermination des vitesses maximale et moyenne.

* La vitesse maximale est obtenue pour $z = h$ (contrainte nulle).

$$u_{max} = u(h) = \frac{g}{\nu} . \sin\alpha \left(h^2 - \frac{h^2}{2}\right)$$

$$\boxed{u_{max} = \frac{gh^2}{2\nu} . \sin\alpha} \quad (6)$$

* La vitesse moyenne U_m :

$U_m = \frac{1}{S} . \int u(z).dS$ avec $\begin{cases} S = W.h \\ dS = W.dz \end{cases}$

$$U_m = \frac{1}{h} . \int_0^h u(z).dz = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{g}{\nu} \sin\alpha \left(hz - \frac{z^2}{2}\right) dz$$

Soit $\boxed{U_m = \frac{g(\sin\alpha) h^2}{3\nu}}$ (7)

Par comparaison entre U_{max} et U_m on trouve : $U_m = \frac{2}{3} U_{max}$

3°/ Le débit volumique / unité de largeur ($W = 1$) :

$$q_v = \int_0^h u(z).dz = \int_0^h \frac{g.\sin\alpha}{\nu} . \left(hz - \frac{z^2}{2}\right) dz$$

$$\boxed{q_v = \frac{g.h^3.\sin\alpha}{3\nu}} \quad (8)$$

. Cas des faibles de α : $\sin\alpha \simeq \alpha$

et $q_v \simeq \frac{g\alpha.h^3}{3\nu}$

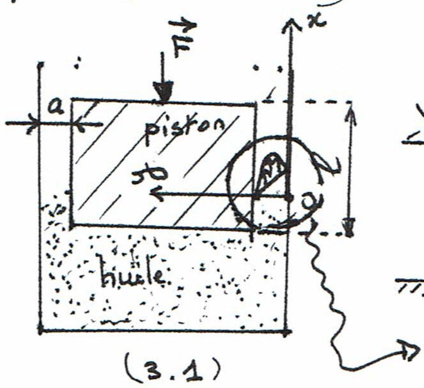
$\alpha = 0$ (pas d'écoulement) $\Rightarrow q_v = 0$

. Cas des grandes valeurs de α : $\sin\alpha \simeq 1$

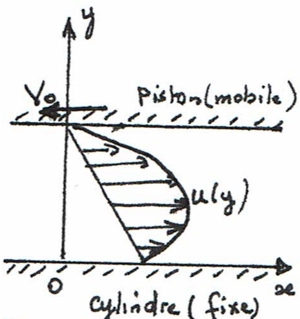
$q_v = \frac{g.h^3}{3\nu}$ (plan vertical)

Exercice 3 : (Amortisseur hydraulique).

Il est constitué d'un système de cylindre/piston. Le déplacement du piston dans le cylindre écrase l'huile qui s'échappe par le jeu (a) entre le cylindre et le piston



(3.1)



(3.2)

L'écoulement de l'huile dans le jeu (a) est représenté sur la figure (3.2) comme un écoulement entre deux plans // celui du cylindre est fixe tandis que celui du piston (supérieur) est mobile avec une vitesse V_0.

$a << R$, l'écoulement d'huile dans le jeu (a) peut être assimilé à un écoulement entre 2 plaques planes parallèles et imperméables

si P^* est la pression motrice.

Les équations de mouvement : (Eqts de N. Stokes)

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=g_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (1)$$

et

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=g_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad (2)$$

Eqt. de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad (3)$$

La composante $(v=0) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=0=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $u(y)$.

Les conditions aux limites sur les deux faces sont :

$y=0 \Rightarrow u=0$ (cylindre)

$y=a \Rightarrow u=-V_0$ (piston)

Les équations de m^{t} se réduisent à :

$$① \Rightarrow \frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dP^*}{dx} \quad (4)$$

$$② \Rightarrow \frac{dP^*}{dy}=0 \Rightarrow P^*(x)$$

Le gradient de pression selon ox : $\frac{dP^*}{dx}$ peut être exprimé par :

$$\boxed{\frac{dP^*}{dx}=\frac{\Delta P^*}{\Delta x}=\frac{F/S}{l}=\frac{F}{S.l}=\frac{F}{\pi R^2 l}} \quad (5)$$

Le calcul de la vitesse par intégration de l'eqt. (4) :

$$\frac{du}{dy}=\frac{1}{\mu}\frac{dP^*}{dy}.y+C_1$$

$$u(y)=\frac{1}{2\mu}.\frac{dP^*}{dy}.y^2+C_1.y+C_2$$

C_1 et C_2 des constantes d'intégration.

$y=0 \Rightarrow u=0 \Rightarrow C_2=0$

$$y=a \Rightarrow u=-V_0=\frac{a^2}{2\mu}.\frac{dP^*}{dx}+C_1.a$$

$$C_1=-\left(\frac{a}{2\mu}.\frac{dP^*}{dx}+\frac{V_0}{a}\right)$$

L'expression de la vitesse $u(y)$ est :

$$\boxed{u(y)=\frac{1}{2\mu}.\frac{dP^*}{dx}(y^2-a.y)-V_0.\frac{y}{a}} \quad (6)$$

* Egalité entre les débits volumiques :

$$\underbrace{\left.\begin{array}{l}\text{Le débit engendré}\\\text{par le piston dans}\\\text{son déplacement}\end{array}\right\}}_{\pi(R-a)^2.V_0}=\underbrace{\left\{\begin{array}{l}\text{Débit s'écoulant}\\\text{dans le jeu (a)}\\\text{entre cylindre et piston}\end{array}\right.}_{\int_0^a u(y).(\underbrace{2\pi R.dy}_{ds})}$$

donc :

$$q_v=2\pi R.\int_0^a u(y).dy=2\pi R.a.\int_0^1 u\left(\frac{y}{a}\right).d\left(\frac{y}{a}\right)$$

$$=2\pi Ra.\int_0^1\left[\frac{a^2}{2\mu}.\frac{dP^*}{dx}.\frac{y}{a}\left(\frac{y}{a}-1\right)-V_0.\frac{y}{a}\right].d\left(\frac{y}{a}\right)$$

$$q_v=2\pi Ra\left[-\frac{V_0}{2}+\frac{a^2}{2\mu}.\frac{F}{\pi R^2 l}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$q_v=2\pi Ra\left[-\frac{V_0}{2}-\frac{a^2}{12\mu}.\frac{F}{\pi R^2 l}\right]$$

L'égalité des débits donne :

$$\pi(R-a)^2V_0=-\pi Ra\left[V_0+\frac{a^2}{6\mu}.\frac{F}{\pi R^2 l}\right]$$

$$V_0\left[(R-a)^2+aR\right]=-\frac{a^3F}{6\mu\pi Rl}$$

Pour $a<<R$:

$$V_0R(a+R)=-\frac{a^3F}{6\mu\pi Rl}$$

$$\boxed{V_0=-\frac{a^3F}{6\mu\pi R^2(a+R)l}\simeq\frac{a^3F}{6\mu\pi R^3 l}} \quad (7)$$

$V_0 \simeq 3{,}3$ cm/s